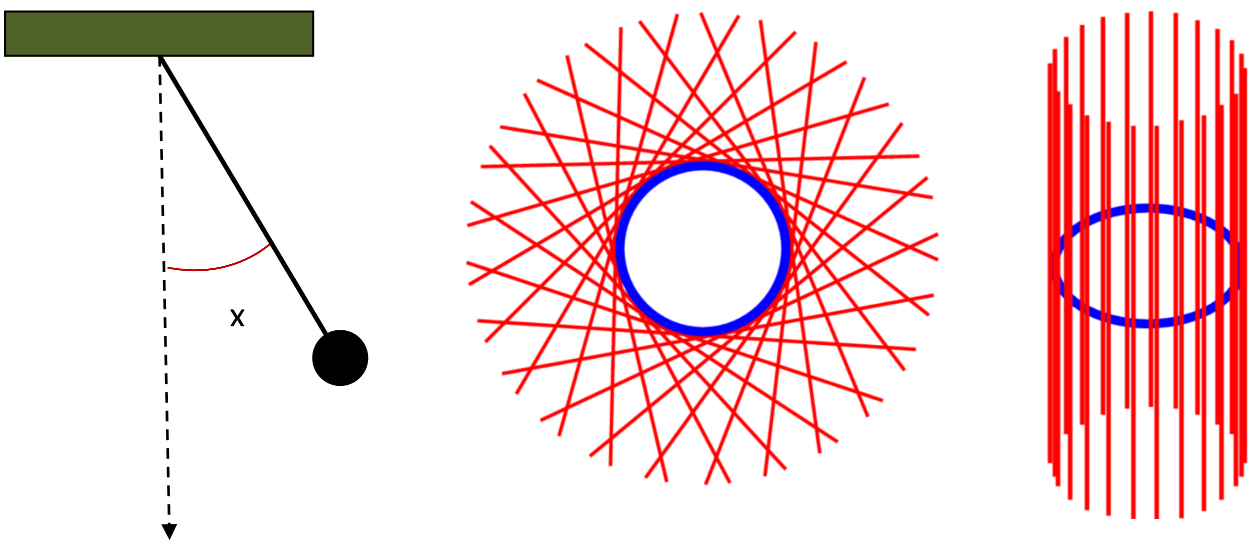
Истраживачка тема: **МЕХАНИКА, ГЕОМЕТРИЈА И ИНТЕГРАБИЛНОСТ**

Аутори: Борислав Гајић, Божидар Јовановић

Прва слика

Покушаћемо да приближимо истраживачку тему која повезује механику, диференцијалну, симплектичку и алгебарску геометрију и теорију Лијевих група. Илустроваћемо дубоку везу између механике и геометрије једноставним примером клатна. **Математичко клатно** је идеализација механичког проблема кретања кугле окачене о нит у вертикалној равни. Простор положаја, тзв. **конфигурациони простор** математичког клатна је кружница са центром у тачки вешања клатна (координатом **x** смо означили угао мерен од вертикале, и узима вредности од –π до +π; координате –π и +π представљају исту тачку на кружници и одговарају усправном положају клатна). Ипак, за опис кретања система, морамо знати и брзину, која припада тангенти на кружницу у датом положају (вредност брзине означићемо промењљивом **y**). Скуп свих могућих положаја и брзина је тангентно раслојење кружнице (**фазни простор** математичког клатна) и оно је у ствари бесконачни цилиндар. На њему можемо видети кретање клатна.

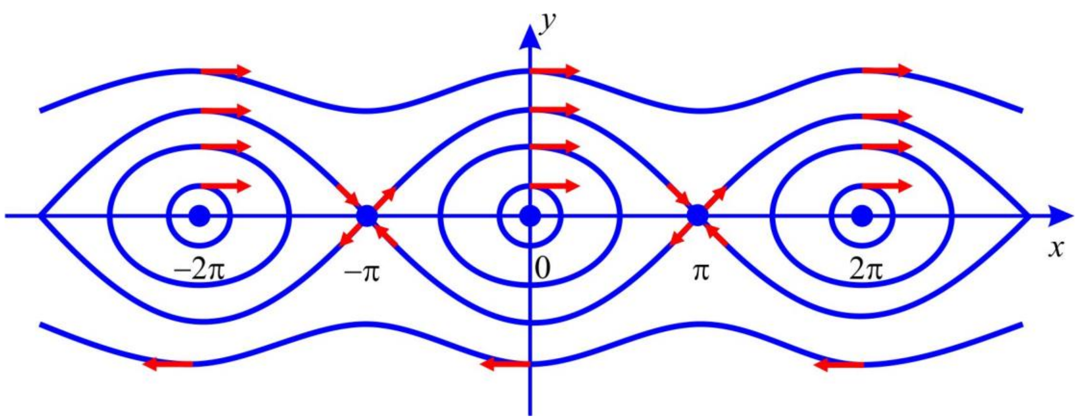


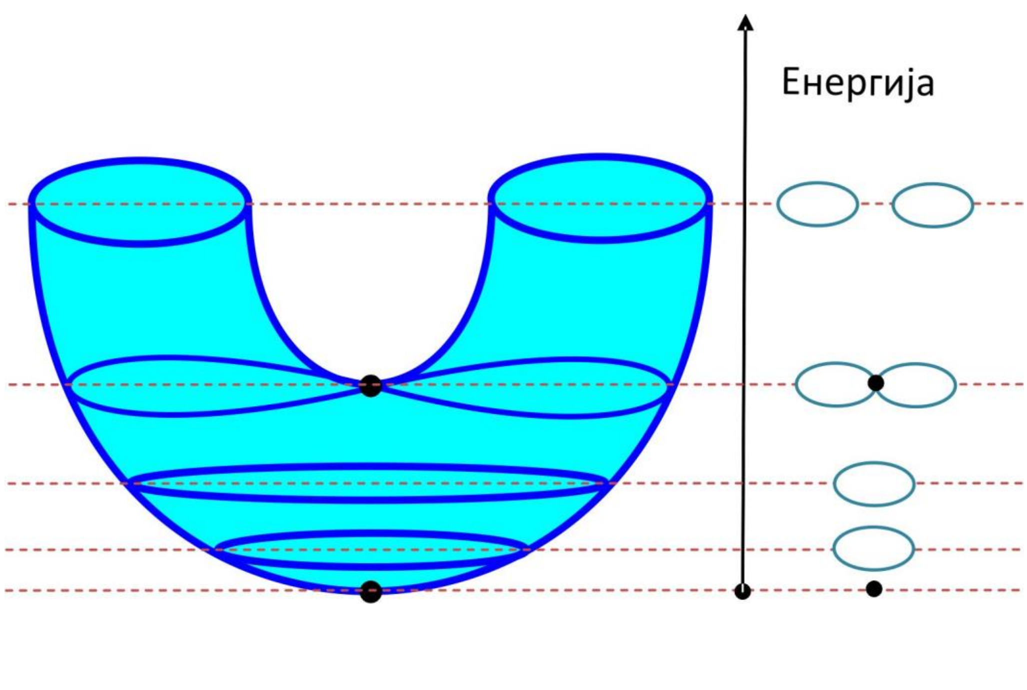
Друга слика

Када цилиндар „размотамо“ у раван и прикажемо у координатама **x** и **y**, добијамо следећу слику динамике клатна, тзв. **фазни портрет** (слика 2а). Напоменимо да тачке са коодинатама (**x**, **y**) и (**x**+2**к**π, **y**), где је **к** цео број, представљају исту тачку фазног простора. Стрелица указује на смер кретања дуж фазних трајекторија. Две трајекторије се састоје само од тачке – то су доњи и горњи положај равнотеже. Уколико се клатно налази у датим положајима и нема почетну брзину кретања, оно ће заувек остати у њима. При томе је доњи положај равнотеже (тачке са координатама **x**=**0**+2**к**π, **y**=0) **стабилан** положај, а горњи положај (**x**=π+2**к**π, **y**=0) **нестабилан**. Положај равнотеже је стабилан ако кретање из њој „блиске“ фазне тачке дуж фазне трајекторије остаје близу положаја равнотеже у сваком тренутку времена.

Слика 2б представља фазни простор (цилиндар), посматран са становишта енергије кретања. Као на слици 1а, издвојене су трајекторије којима одговарају пет вредности енергије кретања. Напоменимо да је енергија система величина која се очувава дуж кретања – то је тзв. **први интеграл система**. Помоћу интеграла енергије, систем једначина које описују кретање математичког клатна је решив, односно **интеграбилан**.

Систем има најмању енергију када клатно мирује у доњем положају равнотеже. Када се енергија повећава, добијамо осцилације клатна око доњег положаја (други и трећи ниво енергије). При томе, за мале осцилације (блиске минималној енергији, у нашем случају други издвојени ниво) важи чувена формула за период осциловања $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где је *l* дужина клатна и g гравитациона константа. Можете и сами једноставним експериментом проверити да је период осциловања са већом енергијом већи.



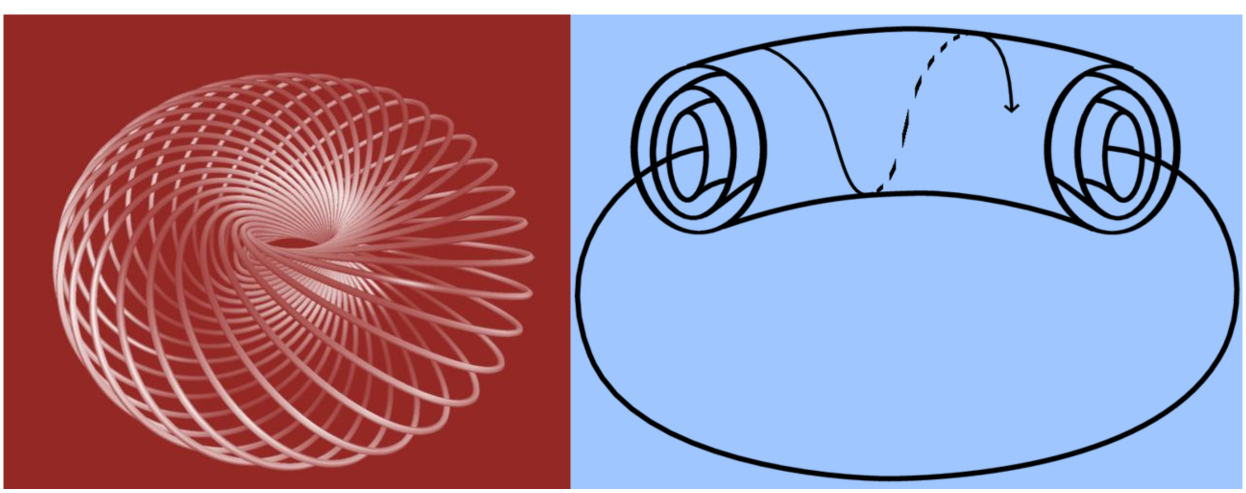


Четвртом нивоу енергије одговарају три кретања система: равнотежни положај усправног клатна, као и **асимптотска кретања** од нестабилне равнотеже и ка њој, у смеру казаљке на сату и обрнутом смеру казаљке на сату. Пети ниво има две трајекторије које одговарају прогресивном кретању клатна, које сада има довољно енергије да константно ротира у смеру, односно супротно смеру казаљке на сату. Закључујемо да се фазни простор клатна „раслојава“ на кружнице. Вредности енергије којима одговарају само кружнице називају се **регуларне** вредности енергије (други, трећи и пети ниво), док првом и четвртом нивоу енергије одговарају **сингуларне** вредности енергије. Видимо да пролазак кроз сингуларни ниво енергије доводи до квалитативне промене кретања (то је тзв. **тачка бифуркације** раслојења на кружнице).

Трећа слика

Математичко клатно нам дочарава и сложеније **интеграбилне системе** са фазним простором већих димензија и бифуркацијама, који не зависе само од енергије већ и од свих других закона очувања тј. првих интеграла датог система. У „универзуму механичких система“, интеграбилни системи, тј. они који допуштају аналитичко решење, представљају веома ретку појаву. Узимајући произвољан механички систем, са вероватноћом близу 1 можемо рећи да дати механички систем није интеграбилан. Колмогоров-Арнољд-Мозерова теорема нам каже да уколико имамо интеграбилни систем на који додамо мали поремећај, он престаје да буде интеграбилан. Кретање у фазном простору постане хаотично и аналитички га је немогуће одредити. Тако да је проучавање и проналажење интеграбилних система веома важна полазна тачка у проучавању разних природних феномена.

Уколико је фазни простор механичког система димензије **2n**, тада је **услов интеграбилности** да дати систем има **n** првих интеграла који задовољавају одређена геометријска својства. Код математичког клатна **n**=1, и енергија система је тражени први интеграл. Из тога што интеграбилни систем има тражених **n** првих интеграла, следи да фазне трајекторије припадају **n** димензионим инваријантним површима унутар **2n**-димензионог фазног простора. У случају „регуларних“ вредности првих интеграла, дате инваријантне површи су **n-димензиони торуси**, који представљају директан производ **n** кружница (Луивил-Арнољдова теорема). На пример, **1**-торус је кружница, а **2**-торус представља површ аутомобилске гуме или ђеврека. Као што се фазни простор математичког клатна „раслојавао“ на 1-торусе, **2n**-димензиони фазни простор интеграбилног система се „раслојава“ на **n**-торусе. При томе се фазне трајекторије правилно „намотавају“ по торусима. Такво кретање се назива **условно-периодично**.



Четврта слика

Вратимо се математичком клатну. Испоставља се да је за решавање једног од најосновнијих интеграбилних система потребан фини математички апарат који повезује комплексну анализу и алгебарску геометрију. Наиме, после смене у диференцијалним једначинама кретања увођењем нове промењиве u, решавање система се своди на „инвертовање“ интеграла облика

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \qquad \Longrightarrow \qquad u = u(u_0, t - t_0),$$

где су u_0, t_0 почетни положај и почетно време, а константа k припада интервалу (0,1) и зависи од почетне брзине (енергије). Решење $u = u(u_0, t - t_0)$ је **елиптичка функција** придружена комплексној алгебарској кривој Γ четвртог степена (**елиптичка крива** или крива **рода** 1) задатој једначином

$$\Gamma = \{v^2 = p(u)\}, \qquad p(u) = (1-u^2)(1-k^2u^2).$$

Приметићемо да је реална димензије криве Γ два и да није тако једноставно разумети како је она уложена у простор C^2, који представља четвородимензиони реални простор. При томе се подразумева да је крива Γ **компактификована** додавањем две **бесконачно далеке** тачке. Комплексна раван C се може компактификовати додавањем једне бесконачно далеке тачке и на тај начин се добија сфера (тзв. **Риманова сфера**). Веза између Риманове сфере и комплексне равни може се илустровати пројекцијом из северног пола сфере која лежи на равни и додирује је у 0. Свакој тачки сфере различитој од северног и јужног пола одговара тачно једна тачка у равни, јужном полу одговара 0, док северном полу одговара бесконачна тачка (слика 4а). Зато смо северни пол и означили симболом ∞.

Сада можемо описати и елиптичку криву Γ. Свакој тачки u комплексне равни, различитој од нула $-1, -k, k, 1$ полинома $p(u)$, одговарају 2 тачке $(u, v_+), (u, v_-)$ на Γ, где су , v_+, v_- решења једначине $v^2 = p(u)$. Нулама полинома одговарају јединствене тачке $A_1(-1,0)$, $A_2(-k, 0)$, $A_3(k, 0)$ и $A_4(1,0)$. Криву Γ можемо видети као две копије комплексне равни C_+и C_- слепљене по горе дужима $[-1, -k], [k, 1]$ на следећи начин. Обе равни треба да разрежемо по датим дужима. У равни C_+ горњи део засека обележимо црвеном бојом, а доњи плавом бојом, док у равни C_- горњи део засека обележимо плавом бојом, а доњи црвеном (слика 4б). До на „истезање“ у четвородимензионом простору, криву Γ добијамо „лепљењем“ плавог и плавог краја, као и црвеног и црвеног краја одговарајућих засека. Коначно, обе копије равни C_+и C_- треба допунити са по једном бесконачно далеком тачком (редом ∞_+, ∞_-). Као резултат, добијамо површ истоветну 2-торусу (слика 4в).

Ипак, за крај, проблем инвертовања интеграла не можемо објаснити на елементаран начин. Посматрајмо **холоморфни диференцијал** $\omega = du/v$, до множења константом једини холоморфни диференцијал на Γ. Интеграл по произвољном део-по-део глатком путу $\gamma \subset \Gamma$ диференцијала ω од фиксиране тачке $A_0(u_0, v_0)$ до тачке P, без обзира на избор пута, даје добро дефинисан комплексан број по модулу **дискретне решетке** $\Lambda = \{n_1, n_2 \in Z\}$, где су $w_1 = \oint_a \omega$, $w_2 = \oint_b \omega$ **периоди диференцијала** ω и a, b **базни циклови** на Γ (кружнице које се не могу по површи елиптичке криве скупити до тачке, на пример циклови $A_1 \curvearrowright A_2 \curvearrowright A_1$и $A_2 \curvearrowright A_3 \curvearrowright A_2$). Добијено холоморфно пресликавање

$$A: \Gamma \longmapsto C/\Lambda, \qquad P \longmapsto \int_{A_0}^{P} \omega$$

се назива **Абелово пресликавање**. Инверз Абеловог пресликавања је елиптичка функција на C/Λ и она је решење нашег проблема. То није усамљени случај, и многи сложенији системи у вишедимензионим фазним просторима могу се експлицитно решити управо коришћењем метода алгебарске геометрије и алгебарских кривих различитих степена и родова.